

等比ドミノの速度変化について

群馬県立高崎高等学校

小山田 篤司 富田 耀大 石川 礼人

要旨

一定倍率で体積と質量、ドミノ同士の間隔が変化していくドミノ(以下、等比ドミノ)の速度変化を3Dプリンターで印刷したドミノを用いた実験、Unityによる物理シミュレーション、物理の理論計算の3つの異なるアプローチで調べた。その結果、ドミノが次のドミノに当たるまでの速さ(以下、ドミノの速さ)は指数関数的に増加する可能性が非常に高いことがわかった。

1. はじめに

1.1 研究全体の目的

インターネット上には、たくさんの等比ドミノの動画がアップロードされている。先行研究では、通常のドミノ倒しの研究は存在していたが、等比ドミノの研究は見つからなかった。動画をよく観察してみると、等比ドミノではドミノが大きくなるにつれて次のドミノに接触するまでの時間は長くなっていた。しかし、等比ドミノでは、次のドミノに当たる角度を一定に設定するため、ドミノ同士の間隔は徐々に広がっていく。このため、等比ドミノでは後半になるにつれて、ゆっくり倒れるが、ドミノ同士の間隔は伸びることから、ドミノの速さがどう変化しているのかは明らかではない。そこで、等比ドミノの速度変化を調べることにした。

1.2 仮説

参考文献⁽¹⁾によると、大きいドミノほど速さは大きくなること、さらにドミノの速さは一定の値に収束するという報告がある。そこで、大きさが大きくなっていく等比ドミノは、ドミノの速さが徐々に大きくなるという仮説を立てた。

2. 実験1

2.1 方法

等比ドミノを3Dプリンターで作成し、図1のように間隔を一定倍率で大きくしながら設置した。倒れてゆくドミノをスマホのカメラのスロー機能で撮影し、そして各ドミノが倒れ始めてから次のドミノに接触するまでの時間を調べ、速度を求めた。今回は、1.1倍、1.3倍等比ドミノで10回ずつ実験し平均をとった。並べ方は衝突時のドミノ同士の角度が 30° となるようにした。使用した素材はPLA樹脂。充填率100%で印刷した。密度は $1.0\text{g}/(\text{cm})^3$ である。1つ目のドミノの大きさは1.1倍等比ドミノ、1.3倍等比ドミノともに日本ドミノ協会公認ドミノの比を参考に $0.35:1:2(\text{cm})$ とした。

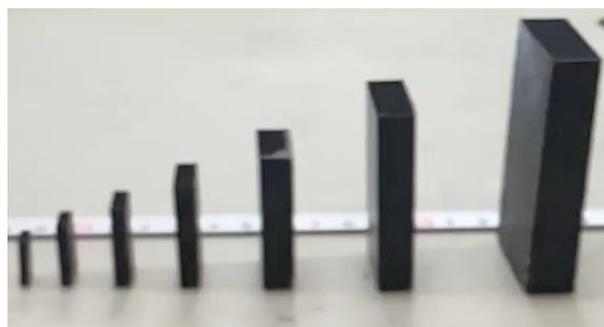


図1 1.3倍等比ドミノの実験の様子

2.2 結果

図2に1.1倍等比ドミノの結果を、図3に1.3倍等比ドミノの結果を示す。エラーバーは標準誤差(SD)を表す。1.1倍等比ドミノは速度の増加の仕方に確かな法則性は見られないもののドミノが大きくなるにつれて速度が明らかに大きくなっている。1.3倍等比ドミノでは、速度はほとんど増加しなかった。

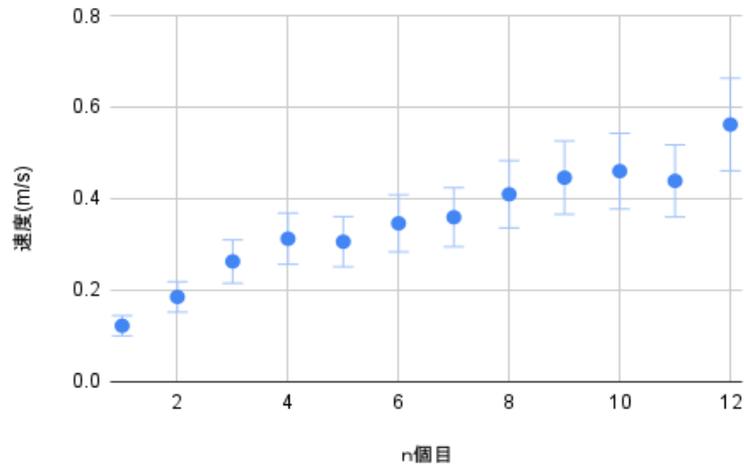


図2 1.1倍等比ドミノの速度変化(実物のドミノ)

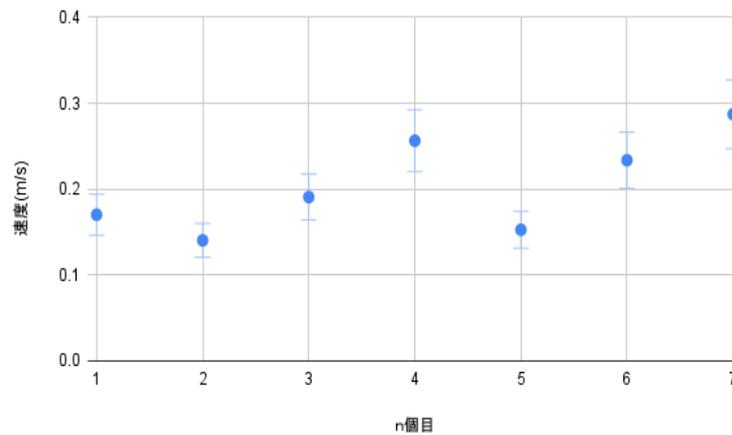


図3 1.3倍等比ドミノの速度変化(実物のドミノ)

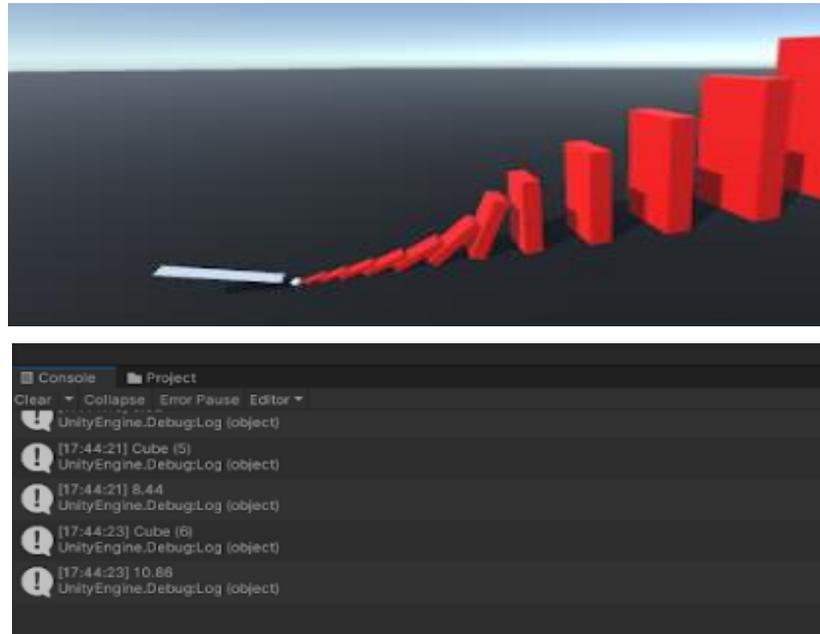
2.3 考察

1.3倍等比ドミノでは、速度はほとんど増加しなかった。3Dプリンターでは、作れるドミノの大きさに制限があり、特に1.3倍等比ドミノでは7つまでしか制作できなかったため、まだ結論を出すことはできない。

3. 実験2

3.1 方法

unityの物理エンジンを用いて等比ドミノ倒しのシミュレーションを行った。図4にその様子を示す。ドミノが次のドミノに接触したとき、シミュレーションを開始してから秒数をコンソールウィンドウに表示させるようにして接触までの時間を測定し、ドミノの速さを調べた。



- 質量 $m=1\text{kg}$ (1つ目)
 - 1つ目の大きさ $1\text{m}:2\text{m}:0.35\text{m}$ (現実ドミノの大きさに揃えることは仕様上できなかった)
 - 動摩擦係数 $\mu'=0.10$ ・静摩擦係数 $\mu=0.10$ ・反発係数0
 - 空気抵抗0(Drag, Angular Drag共に0)・重力加速度 9.81m/s^2
- ※速度は十分小さいものとして扱い、空気抵抗は考慮していない。

図4 Unityによるシミュレーション

3.2 結果

物理シミュレーションの結果を図5, 図6に示す。1.1倍等比ドミノ, 1.3倍等比ドミノは両者とも速度が増加していることがわかった。

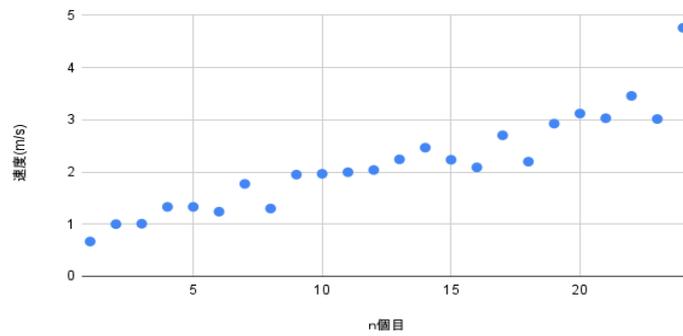


図5 1.1倍等比ドミノの速度変化(Unityによるシミュレーション)

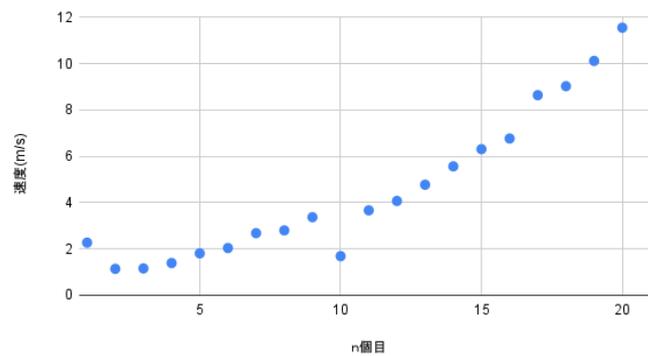


図6 1.3倍等比ドミノの速度変化(Unityによるシミュレーション)

次に, 摩擦係数を0.35にしてシミュレーションをした。図7に結果を示す。グラフの形が大きく乱れることがわかる。

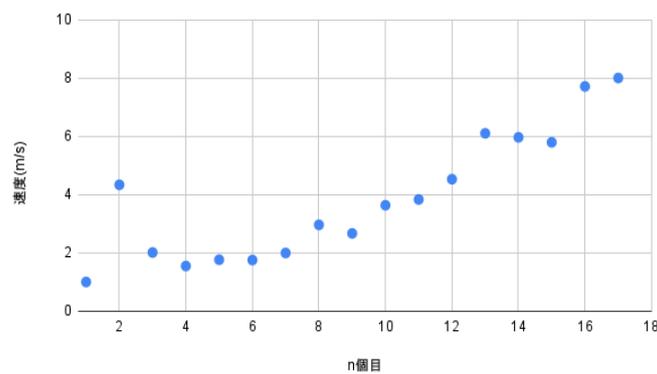


図7 1.3倍等比ドミノ, 摩擦係数0.35の速度変化(Unityによるシミュレーション)

3.3 考察

どちらのグラフも単純な形はしておらずここから法則性を見出すのは厳しいが、1.1倍等比ドミノでは一次関数的な増加、1.3倍等比ドミノでは指数関数的な増加をしているとグラフから推測できる。また、摩擦係数を0.35に変化させたとき図6のように、グラフの概形が大きく乱れたことから、実験4、5の結果で見られる不規則な増減には摩擦が影響している可能性が高いと考えられる。

4. 物理計算による検証

4.1 目的

実験1、実験2では等比ドミノの速度が増加していくことの可能性を十分に示しているが、条件を揃えられていないため、また別の方法でパラメータを揃えて実験しより確かな結論を導くとともに、1.1倍、1.3倍等比ドミノ以外の様々な倍率の等比ドミノの速度変化を調べる。

4.2 方法

衝突後の後ろの牌及びドミノの厚さ、摩擦を無視してまずは各ドミノの初速度を求めた後、そのドミノが重力の影響を受けて倒れ微小区間ごとにどれほど倒れたかを計算し、ドミノ同士の角度が 30° となるまで積算し倒れるのにかかった秒数 t を求める。計算はスプレッドシートを用いた。なお、計算でも3と同様空気抵抗を考慮していない。

4.3 計算

まず初めに、

ω_n = n個目のドミノの角初速度

ω'_n = n個目のドミノの終端角速度

m_n = n個目のドミノの質量

I_n = n個目のドミノの点 O_n 周りの慣性モーメント

r_n = n個目のドミノの高さの二分の一

g =重力加速度(9.81)

と定義する。図8にこの様子を示す。

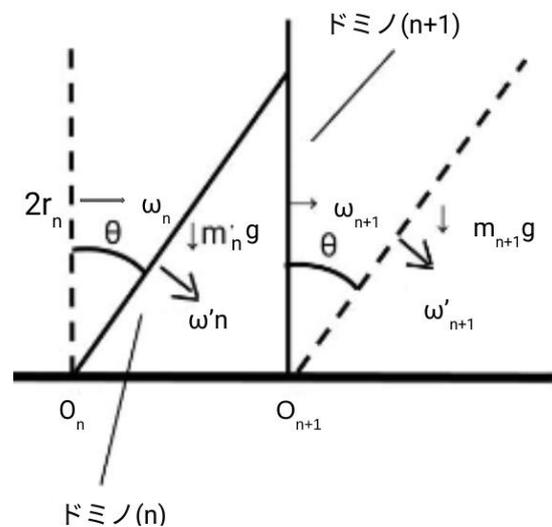


図8 物理計算の変数

次に、計算では考慮していない摩擦や厚さ等による運動量の損失を、運動量伝達係数 b として表現し、この値は先行研究⁽²⁾と同様に $b = 0.98$ とした。

エネルギー保存則によりドミノ(n)の終端角速度とドミノ(n+1)の角初速度の関係がわかる。

$$\frac{1}{2}I_n \times \omega_n^2 + m_n \times g \times r_n \times (1 - \cos\theta) = \frac{1}{2}I_n \times (\omega'_n)^2$$

次に運動量保存則よりドミノ(n)の角初速度と角速度の終端速度の関係を式に表すと、

$$I_n \times \omega_n' \times \cos\theta \times b = I_{n+1} \times \omega_{n+1}$$

ドミノ(1)の角初速度(各実験の結果から予想されるドミノ(1)の値を代入し、この2つの式を繰り返し用いて角初速度を求める。

次に、初速 ω_n を与えられたドミノ(n)が重力の影響を受けて次のドミノに衝突するまでの時間を求める。ドミノ(n)について、ドミノ(n)が倒れ始めてからの時間を t 、その時刻におけるドミノ(n)と鉛直方向のなす角を Φ とすると、運動方程式により、

$$I_n \times \frac{d^2\phi}{dt^2} = m_n \times g \times r_n \times \sin\phi$$

また、 $\frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt}$ とすると、

$$\frac{d\omega}{dt} = (3g \times \sin\phi) / (4r_n)$$

と表せる。

ここで、

$$d\Phi = \omega \times dt$$

$$t = t + dt$$

$$\Phi = \Phi + d\Phi$$

$$d\omega = (3g \times \sin\phi) / (4r_n) \times dt$$

$$\omega = \omega + d\omega$$

この5式を繰り返し使用して、経過時間 t 、角度 θ 、角速度 ω を $\sin\theta > 0.5$ になるまで積算する。すると経過時間がわかるので速度を求める。dtは十分小さな値にして計算を行う。

角初速度は、実験1, 2から予想される値を代入し、その他の条件も実験1, 2に対応させる。

4.4 結果

図9, 10にUnityによるシミュレーションと計算結果の比較を示す。シミュレーションと計算結果はよく一致していることがわかる。

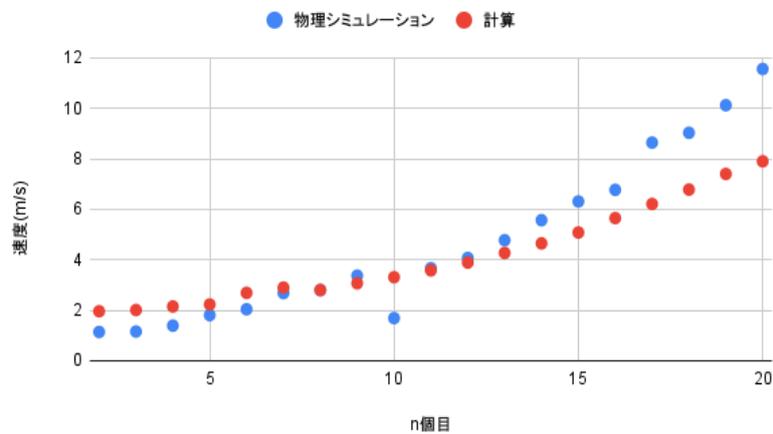


図9 1.3倍等比ドミノのUnityによるシミュレーションと計算結果の比較

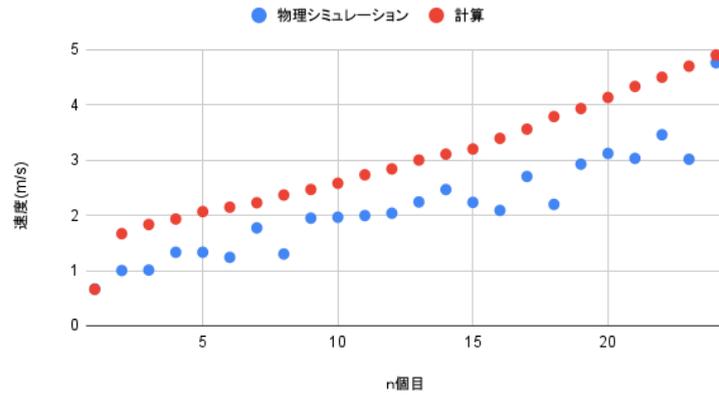


図10 1.1倍等比ドミノのUnityによるシミュレーションの結果と計算結果の比較

図11, 12に実物ドミノと計算結果の比較を示す。実物ドミノと計算結果もよく一致していることがわかる。

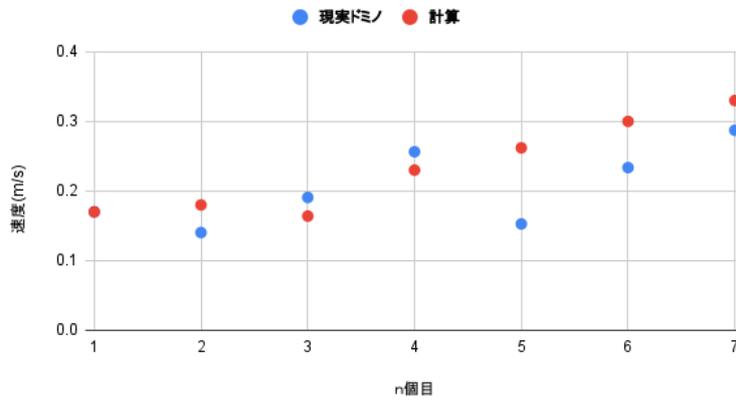


図11 1.3倍等比ドミノの実物ドミノ結果と計算結果の比較

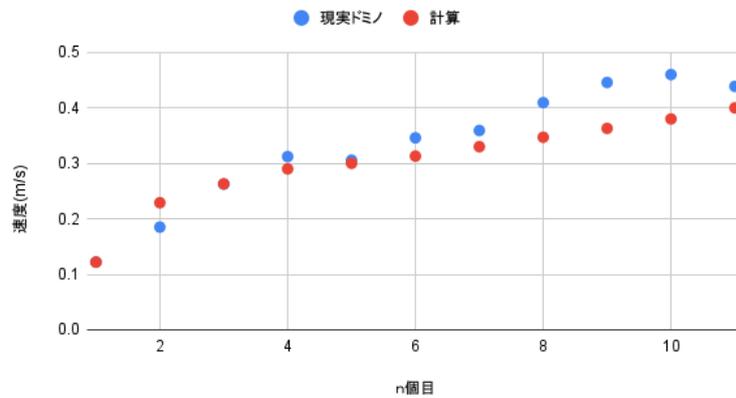


図12 1.3倍等比ドミノの実物ドミノ結果と計算結果の比較

4.5 考察

図13に、等比ドミノの1つ前のドミノに対する速さの倍率を示す。1.1倍等比ドミノ以外のすべてのグラフはそれぞれの実験で出た値にかなり近づいた。すなわち、等比ドミノの速度は増加していくことは明らかであり、またそれぞれの実験及び計算の正しさもほとんど証明された。次に計算のグラフの形だが1次関数的増加をしているように見えるが実際はそうではない。速度の増加率を調べてみると、1.1倍等比ドミノは1.05、1.3倍等比ドミノ1.12周辺を推移していたので指数関数に近いグラフである。また、図12より倍率が上がるにつれて速度の増加率も上がっていくことがわかる。しかしこれは厚さと空気抵抗を考えていないため生じた値の変化とも言える。実際は倍率が上がればそもそも倒れない。ここで重要になってくるのは、ドミノが自然に倒れ始める角度になるまでの時間がどれほどかかるのかということだ。厚さによる影響が無視できる倍率のものであれば、今回の計算結果と同じくドミノの速度はほぼ指数関数的に増加していくと考えられる。

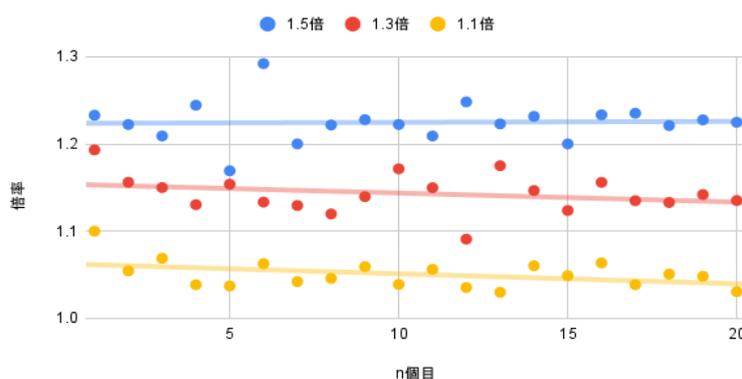


図13 1つ前のドミノに対する速さの倍率

5. まとめ

結論

等比ドミノの速度はほとんど指数関数的に増加していき、倍率が大きいほど個数に対する速度の増加率も大きくなる。

今後の展望(課題)

まず、3Dプリンターでは作成できるドミノの大きさに限界があるため、別の方法を検討する必要がある。しかし、ドミノの密度を揃える必要があり、形、大きさだけ揃っていても意味がないため、3Dプリンター以外の方法の検討には注意が必要である。今回は現実ドミノとUnityによるシミュレーションで大きさをそろえることができず、相似の関係の結果しか得ることができなかった。今後は大きさをそろえた研究が必要である。実物の等比ドミノでは倍率が大きいと、途中で倒れなくなる現象が確認されているが、このようなことが起きる条件も研究していく必要がある。

謝辞

本校教諭の岡田直之先生をはじめとしたこの研究に協力してくださったすべての方に感謝申し上げます。

参考文献

(1) 市川翔太ら「ドミノ倒しの研究」学校間相互ネット(2012)

<https://school.gifu-net.ed.jp/ena-hs/ssh/H24ssh/sc3/31211.pdf>

(2) 千葉大学高大連携部「ドミノ倒しの進行速度について」

<https://www.cfs.chiba-u.jp/koudai/kenhinto/domino.pdf>