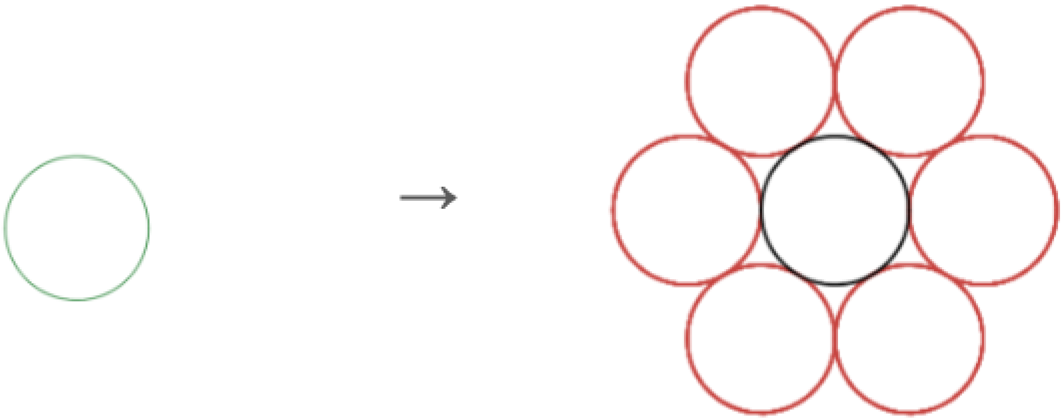
Deep Kissing Number Problem

高崎高校　佐藤匡　岡川慧祐　橋本和

～接吻数問題とは～

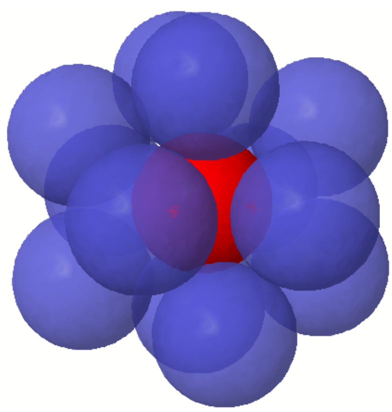
<u>**n**次元の単位球の周りに単位球を重ならず触れ合うように並べることができるとき、最大何個並べることができるかという問題</u>

例えばn=2の場合、



上図のように、ある一つの円を置いたとき、その周りに中心の円と同じ半径の円を周りに最大6個並べることができる。
よって、n=2のとき、6となる。

また、例えばn=3のとき、



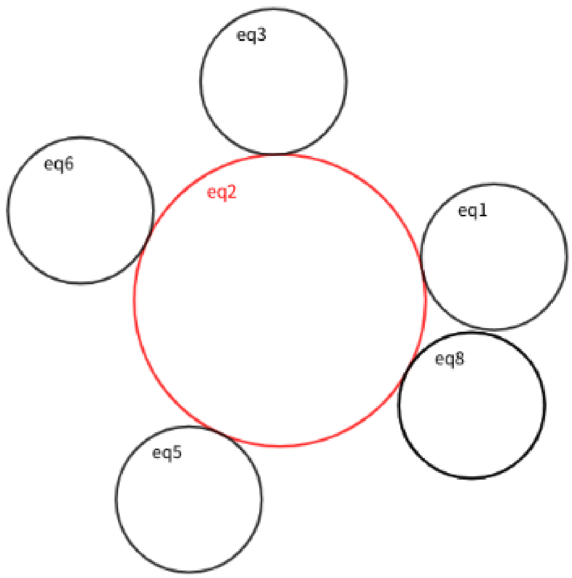
上図のように、外側の球12個が中心の球と接している。このときが最大であることが知られている(この事実は1953年に証明された)。
よって、n=3のとき、12となる。

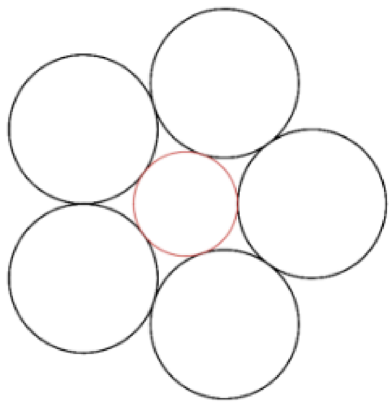
また、n=4以降の場合も様々な考察がなされている。

しかしn=4以降の場合は考えにくいため、今回私達はn=2,3の場合について、本来の接吻数問題の条件を変更して新たな問題を設定して考察した。その問題を以下に示す。

2, 3次元においてn個の単位球を周りに重ならず触れ合うように並べることができるような球で、半径が最小のものの半径をnで表せるか

例えば、n=5のとき、





左上の図のように、ある単位円を5つ用意して上手く配置すると、5つの外側の円全てに外接する円が存在する。この赤色で示した円の半径が最小となるとき、右上の図で示したように、外側の単位円の中心どうしを結んだ図形が正五角形をなすとき、赤の円の半径が最小になると直感的には予想できる。

これを踏まえると、すべてのnに対して、n個の外側の円の中心を結んだ図形が正n角形をなすとき、内部の円の半径は最小値をとると予想できる。
ここで、この予想が正しいことを以下に示す。

～証明～

最終的に求める半径をrとする。

中心がOで半径が$R=r+1$の円Cがあり、その周上にn個の点$A(1),A(2),\cdots\cdots,A(n)$がこの順で並んでいるとする。ただしどの2点間の距離も2以上である。

n角形$A(1)A(2)\cdots\cdots A(n)$の外部に$O$があるとする。このとき、$C$の周上の点$P$で、$n-1$個の点$A(1),A(2),\cdots\cdots A(n-1)$との距離がいずれも2以上であり、かつ$n$角形$A(1)A(2)\cdots\cdots A(n-1)P$の内部に$O$があるようなものが存在する。よって$n$角形$A(1)A(2)\cdots\cdots A(n)$の内部に$O$がある場合の$R$の最小値を求めれば十分である。

n角形$A(1)A(2)\cdots\cdots A(n)$の内部に$O$がある場合を考える。

Oから線分$A(1)A(2),A(2)A(3),\cdots\cdots A(n)A(1)$に垂線$OH(1),OH(2),\cdots\cdots OH(n)$を引く。$\angle A(1)OH(1)=\theta(1),\angle A(2)OH(2)=\theta(2),\cdots\cdots,\angle A(n)OH(n)=\theta(n)$とする。

このとき

$$\theta(1)+\theta(2)+\cdots\cdots\theta(n)=180^\circ \quad \cdots\cdots ①$$

であり、また各角の大きさは0より大きく$\pi/2$以下。(なぜなら$\pi/2$を越えるとOがn角形$A(1)A(2)\cdots\cdots A(n)$の外部にあるという仮定に反するから)。

どの2点間の距離も2以上という条件は、どの隣り合う2点間の距離も2以上であれば満たされる。すなわちn個の線分$A(1)A(2),A(2)A(3),\cdots\cdots,A(n)A(1)$の長さがどれも1以上であれば満たされる。これを式で書くと以下。

$$R\sin(\theta(1))\geqq 1,R\sin(\theta(2))\geqq 1,\cdots\cdots R\sin(\theta(n))\geqq 1 \quad \cdots\cdots ②$$

ここでkを$1\leqq k\leqq n$を満たす整数とし、$\theta(1),\theta(2),\cdots\cdots,\theta(n)$のうち$\theta(k)$が最小であるとする。$\sin(x)$が$0\leqq x\leqq \pi/2$の範囲で単調増加であること、$\theta(1),\theta(2),\cdots\cdots,\theta(n)$がいずれも0より大きく$\pi/2$以下であることから、以下は②の必要十分条件

$$R\sin(\theta/k)\geqq 1 \quad \cdots\cdots ③$$

ここで①より

$$\pi=\theta(1)+\theta(2)+\cdots\cdots\theta(n)\geqq n\theta(k)$$

$$\pi/n\geqq \theta(k)$$

$\sin(x)$が$0\leqq x\leqq \pi/2$の範囲で単調増加であることと、$0<\theta(k)\leqq \pi/2$より

$$\sin(\pi/n)\geqq \sin(\theta(k))$$

これを③に代入すると

$R\sin(\pi/n) \geqq 1$

Rについて整理したのちにR=r+1を代入して

$r \geqq (1/\sin(\pi/n))-1$ ■

以上の証明により、2次元における条件を満たす円の最小値は

$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}} - 1$となる。

以下に関数グラフを用いたシミュレーションを示す。
https://www.desmos.com/calculator/65db666c9b?lang=ja

～3次元の場合～

ここからは、3次元の場合を考える。
2次元の場合の結果を踏まえると、3次元において、外側の球の中心を結んだときに正多面体をなすときに、その内部に外側の球全てに外接する球が存在すると予想できる。
正多面体は一般に5種類存在することが知られているから、これらを用いて内部の球の半径の最小値の予想値を示す。

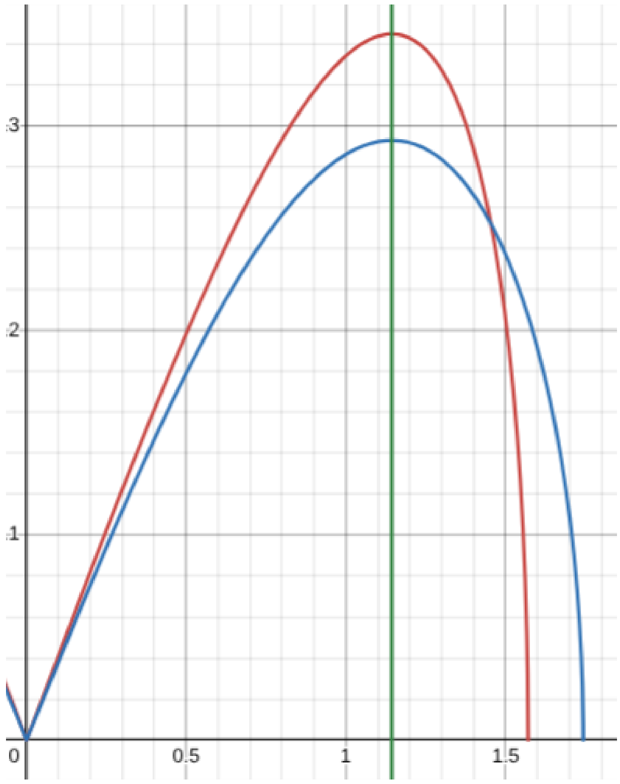
球が4個のとき(正四面体)	$\frac{\sqrt{6}}{2}-1$
球が6個のとき(正八面体)	$\sqrt{2}-1$
球が8個のとき(正六面体)	$\sqrt{3}-1$
球が12個のとき(正二十面体)	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}-1$
球が20個のとき(正十二面体)	$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}-1$

上記の図は、以下の関数グラフを用いて示す。
https://www.desmos.com/3d/62d90e7f19?lang=ja

ただ、これらの値はあくまでも予想値に過ぎず、これらが正しいことを示すことを試みた。
以下にn=4の場合が正しいことを示す。

～証明～

(補題1)
本研究において独自に、関数$f(\Omega)$を定義した。これは、三角錐OABC（OA=OB=OC=1）のOまわりの立体角をΩとしたときの、△ABCの面積を表すΩの関数である。



（desmosによって作成）

上のグラフは、∠AOB, ∠BOC, ∠COAのうち1つを変数としたときの、青：$f(\Omega)$、
赤：Oを中心とする、A, B, Cの外接球が、A, B, Cによって切り取られる　面積を示す。
グラフから、赤と青の増減は一致しているため、$f(\Omega)$と、Oを中心とする、A, B, Cの外接球がA, B, Cによって切り取られる面積は互いに単調増加である。

【証明】
最終的に求める半径をrとする。
半径$R = r + 1$の球Pを用意する。
Pの球面上に、点A, B, C, Dをおく。どの2点間の距離も2以上である。
(i)Pの中心Oと、A, B, C, Dがすべて同一平面上に位置しうるRの範囲を求める。
このとき、Oを中心とする半径Rのある円周上にA, B, C, Dが位置しているので、これを許すRの範囲は、2次元の結果から、$R \geq \sqrt{2}$
(ii)A, B, C, Dのいずれか3つを頂点に持つ三角形が、直角三角形または、鈍角三角形となりうるRの範囲を求める。
Oを中心とする半径Rのある円周上に3つの頂点が位置し、2辺の大きさ2である直角二等辺三角形をなすときにRは最小であるから、$R \geq \sqrt{2}$
(iii)どんなRについても、三角錐ABCDの内部にOが含まれるように,

A, B, C, Dを配置することができる。

(i)〜(iii)を踏まえ、以下、$R<\sqrt{2}$で考える。
三角錐OABC、OBCD、OABD、OACDについて、それぞれの、Oまわりの立体角を$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$とする。
$(\Omega_1+\Omega_2+\Omega_3+\Omega_4=4\pi,\quad 0<\Omega_k<2\pi(k=1,2,3,4))$
$R<\sqrt{2}$において、各底面について、辺の大きさが2の正三角形のときに(∵ $R<\sqrt{2}$では各底面は必ず鈍角三角形となる)、その面積は最小値$\sqrt{3}$をとるから、

$$R^2 f(\Omega_k)\geq\sqrt{3}$$

$$R^2\geq\frac{\sqrt{3}}{f(\Omega_k)}$$

このすべてを満たすRの最小値を求める。
$\Omega_1=\Omega_2=\Omega_3=\Omega_4=\pi$とすれば、$R^2$は$\frac{\sqrt{3}}{f(\pi)}$をとりうる。$\Omega_k$のうち、πより大きいものがあるとき、必ずπよりも小さいものもあるため、R^2は$\frac{\sqrt{3}}{f(\pi)}$よりも大きくなる。よって、$\Omega_1=\Omega_2=\Omega_3=\Omega_4=\pi$のとき、$R$は最小である。
つまり、Pの表面積は、A, B, C, Dのうちの3点が切り抜く球面の面積の4倍である。
以上より、$R^2 f(\Omega_k)$、切り取る球面の面積、Pの表面積、Rは互いに単調増加であるから、$R^2 f(\Omega_k)$が最小のとき、Rは最小である。
よって、$R^2 f(\Omega_k)$を最小とするためには、△ABC, △ABD, △ACD, △BCDがすべて辺の大きさ2の正三角形となるように、つまりABCDが辺の大きさ2の正四面体をなすに配置すれば良い。
このとき、$R=\frac{\sqrt{6}}{2}$で、これは$\sqrt{2}$より小さく適している。
以上より、3次元において、n=4のとき、求める値は

$$\frac{\sqrt{6}}{2}-1$$ である。■

ただ、n=6,8,12,20の場合は証明ができていない。
n=4の場合を考えると、外側の球によって正多面体を形成するとき、内部の球の半径が最小になるのではないかと予想している。

また、上記のnの値以外の場合、内部の球の半径の最小値がどうなるのかも未解決である。

～結論～
2次元の場合は解決した。
3次元の場合は、課題が残されている。

～今後の展望～
・n=6,8,12,20(外側の球によって正多面体をなす)の場合、求める値　が予想値と一致することを示す。

・n=4,6,8,12,20以外の場合について、どのような条件を満たせば良いのかを考察する。

～謝辞～
　本校教諭である今井 健太先生には、ともに考察していただき、助言をいただきました。深く感謝申し上げます。

～参考文献～

接吻数問題と24次元リーチ格子
https://tsujimotter.hatenablog.com/entry/kissing-problem-and-leech-lattice