k-ナッチ数列における素数 p を法としたときの剰余の最大周期に関する考察

柿沼広大　小池広巌　内藤陽貴　福嶋勇人
群馬県立高崎高等学校
〒370-0861　群馬県高崎市八千代町 2 丁目 4 番 1 号

要旨

k-ナッチ数列において各項の素数 p を法とした剰余の周期を考えるとき，その周期が最大となるのはどのようなときか考察した.その結果，第 0 項から第 k-1 項までの組が(0，0，0，…，1)のとき剰余周期が最大になることがわかった.

1.はじめに

1.1　研究の動機

フィボナッチ数列について調べていたところ，ウォール予想(フィボナッチ数列を素数で割った剰余の周期の個数についての一般的な公式が有るとの予想)が見つかった.そこで私達はフィボナッチ数列を拡張し，k-ナッチ数列にした場合の剰余周期について考察することにした.

1.2　研究全体の目的

k-ナッチ数列において各項の素数 p を法とした剰余の周期を考えるとき，その周期が最大となるのは第 0 項から第 k-1 項の値がどのような組のときか求める.

1.3　定義

漸化式が先行 k 項の和で定義される数列を k-ナッチ数列と定義する.すなわち，

$$F_n = \sum_{i=n-k}^{n-1} F_i \quad (n \geq k)$$

また，k-ナッチ数列の第 0 項から第 k-1 項までの組，すなわち$\left(F_0, F_1, \cdots F_{k-1}\right)$を以下，初期値と呼ぶ.

1.4　仮説

参考文献[1]によるとフィボナッチ数列については初期値が(0，1)のときに剰余周期は最大になることが報告されており，一般に$k \geq 3$の k-ナッチ数列でも同様に初期値が(0，0，0，…，1)のとき剰余周期が最大になるのではないか.

2.　研究方法

2.1　方法

k=3 のときの初期値を変化させて，2 から 18 までの自然数を法としたときの剰余周期の長さをそれぞれ調べた.

2.2　結果

初期値(0，0，…，1)のときの剰余周期を剰余周期の基本形と呼ぶことにすると図 1 のように法とする自然数が同じ時に剰余周期の基本形がそれぞれの自然数に対する最大の長さとなり，それ以外に取り得る剰余周期の長さは基本形の約数だった.

mod	基本形
2	4
3	13
4	8
5	31
6	52
7	48
8	16
9	39
10	124
11	110
12	104
13	168
14	48
15	403
16	32
17	191
18	156

mod	周期
2	1,2,4
3	1,13
4	1,2,4,8
5	1,31
6	1,2,4,13,26,52
7	1,48
8	1,2,4,8,16
9	1,13,39
10	1,2,4,31,62,124
11	1,10,110
12	1,2,4,13,52,104
13	1 168
14	1,2,4,48
15	1,13,31,403
16	1,2,4,8,16,32
17	1 191
18	1,2,4,13,26,39,52,156

図 1

2.3　考察

k-ナッチ数列($k \geq 3$)についてもやはり基本形のときの剰余周期が長さ最大であり，剰余周期として取り得る値は基本形のときの剰余周期の約数であるといえる可能性がある.

3.　結果と考察、結論

補題 3.1

k-ナッチ数列の各項をある自然数 n で割った余りには周期性があり，その長さは有限である.

証明

連続する k 項の余りがそれまでの連続する k 項の余りの順序まで等しければ周期があると言える.

ここで周期がないと仮定するとどの連続する k 項の余りも等しくないことになり，これは余りの組み合わせが有限個であることに矛盾する.

よって周期が存在し，その長さは有限である.

定理 3.1

任意の素数 p に対して k-ナッチ数列($k \geq 3$)$\{F_n\}$において初期値を変化させたとき，

$\left(F_{0,} F_{1,} \cdots F_{k-1}\right) = (0, 0, \cdots, 1)$ のときに剰余周期最大.

すなわち，任意の初期値に対して剰余周期を$N\left(p; F_{0,} F_{1,} \cdots, F_{k-1}\right)$のように

k+1 個の変数を用いて表すとき，

$N\left(p; F_{0,} F_{1,} \cdots, F_{k-1}\right) \leq N(0, 0, \cdots, 1)$ が成り立つ.

定理 3.2

任意の素数 p，任意の初期値$\left(F_0, F_1, \cdots F_{k-1}\right)$に対して，$N\left(p; F_0, F_1, \cdots, F_{k-1}\right)$は$N(0, 0, \cdots, 1)$の約数.

すなわち，$N\left(p; F_0, F_1, \cdots, F_{k-1}\right) | N(0, 0, \cdots, 1)$.

以下の証明で，定理 3.1，定理 3.2 を同時に示す.

証明

以下，法 p において合同 を簡単に記号「≡」を用いて表す.

次のような数列$\left\{G_n^1\right\}, \left\{G_n^2\right\}, \cdots, \{G_n^k\}$を考える.

$$\begin{cases} G_n^j = \sum_{i=n-k}^{n-1} G_i^j (n \geq k)\ (1 \leq j \leq k) \\ \begin{pmatrix} G_{k-1}^1 & G_{k-1}^2 & G_{k-1}^3 & G_{k-1}^4 & \cdots & G_{k-1}^{k-1} & G_{k-1}^k \\ G_{k-2}^1 & G_{k-2}^2 & G_{k-2}^3 & G_{k-2}^4 & \cdots & G_{k-2}^{k-1} & G_{k-2}^k \\ G_{k-3}^1 & G_{k-3}^2 & G_{k-3}^3 & G_{k-3}^4 & \cdots & G_{k-3}^{k-1} & G_{k-3}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ G_3^1 & G_3^2 & G_3^3 & G_3^4 & \cdots & G_3^{k-1} & G_3^k \\ G_2^1 & G_2^2 & G_2^3 & G_2^4 & \cdots & G_2^{k-1} & G_2^k \\ G_1^1 & G_1^2 & G_1^3 & G_1^4 & \cdots & G_1^{k-1} & G_1^k \\ G_0^1 & G_0^2 & G_0^3 & G_0^4 & \cdots & G_0^{k-1} & G_0^k \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & \cdots & 2^{k-4} & 2^{k-3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & \cdots & 2^{k-5} & 2^{k-4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 2^{k-6} & 2^{k-5} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

今, 数列$\left\{G_n^1\right\}$の剰余周期を N とすると N=N(p;0, 0, …, 1)で$G_n^j \equiv G_{n+j-1}^1 (1 \leq j \leq k-1), G_n^k \equiv G_{n-1}^1$であるから

$\{G_n^j\}(1 \leq j \leq k)$の剰余周期は全て N.

次に数学的帰納法より

数列$\{F_n\}$は数列$\left\{G_n^1\right\}, \left\{G_n^2\right\}, \left\{G_n^3\right\}, \cdots, \{G_n^k\}$を用いて

$$F_n = \sum_{i=1}^{k-2}\left(F_{k-i} - \sum_{j=1}^{k-i-1} F_j\right)G_n^i + F_1 G_n^{k-1} + F_0 G_n^k$$

また，数列$\{G_n^j\}(1 \leq j \leq k)$の剰余周期が全て N なので

$$\begin{pmatrix} G^1_{N+k-1} & G^2_{N+k-1} & \cdots & G^{k-1}_{N+k-1} & G^k_{N+k-1} \\ G^1_{N+k-2} & G^2_{N+k-2} & \cdots & G^{k-1}_{N+k-2} & G^k_{N+k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ G^1_{N+2} & G^2_{N+2} & \cdots & G^{k-1}_{N+2} & G^k_{N+2} \\ G^1_{N+1} & G^2_{N+1} & \cdots & G^{k-1}_{N+1} & G^k_{N+1} \\ G^1_{N} & G^2_{N} & \cdots & G^{k-1}_{N} & G^k_{N} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 2^{k-3} & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 2^{k-4} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで各 n(≥ 0)に対して

$$U_n = \begin{pmatrix} F_{n+k-1} \\ \vdots \\ F_{n+2} \\ F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$$ と置くと,

$$U_N = \begin{pmatrix} F_{N+k-1} \\ \vdots \\ F_{N+2} \\ F_{N+1} \\ F_N \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} G^1_{N+k-1} & G^2_{N+k-1} & \cdots & G^k_{N+k-1} \\ G^1_{N+k-2} & G^2_{N+k-2} & \cdots & G^k_{N+k-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ G^1_{N+2} & G^2_{N+2} & \cdots & G^k_{N+2} \\ G^1_{N+1} & G^2_{N+1} & \cdots & G^k_{N+1} \\ G^1_{N} & G^2_{N} & \cdots & G^k_{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{k-1} - \sum_{i=1}^{k-2} F_i \\ F_{k-2} - \sum_{i=1}^{k-3} F_i \\ \vdots \\ F_2 - F_1 \\ F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$$

$$
\equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & \cdots & 2^{k-3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & \ddots & 2^{k-4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ddots & 2^{k-5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & 2^{k-6} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{k-1} - \sum_{i=1}^{k-2} F_i \\ F_{k-2} - \sum_{i=1}^{k-3} F_i \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ F_2 - F_1 \\ F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} F_{k-1} \\ F_{k-2} \\ \vdots \\ F_2 \\ F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}
$$

$$
= U_0
$$

となるので，任意の素数 p，任意の初期値$\left(F_{0,} F_{1,} \cdots F_{k-1} \right)$に対して，$N\left(p; F_{0,} F_{1,} \cdots , F_{k-1} \right)$は$N(0, 0, \cdots , 1)$の約数となることがわかり，

$$
N\left(p; F_{0,} F_{1,} \cdots F_{k-1} \right) \leq N = N(p; 0, 0, \cdots , 1)
$$

よって，任意の素数 p に対して，初期値(0，0，…，1)のときに剰余周期最大.

４．参考文献

(1) 小笹 航平，山根 映介，古清水 大直，倉田 久靖，
素数を法としたフィボナッチ型数列の周期.米子工業専門学校