

クロスカリキュラム 物理×数学（SSH 物理Ⅱ）に関する検証

目的

物理と数学の分野融合課題を物理の知識と数学の知識を活用して解決するための科学的思考力・判断力・表現力の基礎を育成する。

令和2年度における課題・改善点

【課題】

- ・SSH クラス対象としてはモデル授業が完成したといえるが、普通理型に広げるにあたっては、普通理型の生徒に合わせた授業展開を考える必要がある。

【改善点】

- ・普通理型に展開する際にも、指導のポイントを焦点化して、計算に追われて終わることのないようにする。

仮説

数学Ⅲで履修する微積分学を習熟した状態で、物理と数学の分野融合課題として、空気抵抗を受けながら運動する物体の過渡現象や部屋の換気モデルを活用して1階の常微分方程式の解法を学んだ後に、直流RC回路の電流の過渡現象や線型モーターによる過渡現象を扱うことで、物理の課題を数学の知識・技能を活用して解決するための科学的思考力・判断力・表現力を深化させることができる。

方法

<第1回>空気抵抗を受ける物体のモデルを使った1階の常微分方程式の解法の習得

教務部の授業改善研修の一環として、数学の教員とチームを組んで授業を行った。

まず、1階の常微分方程式の解法パターンを解説した。次に、力学において空気抵抗を受ける物体の運動方程式を1階の常微分方程式として解く方法を講義・演習してもらった。

その後、教室の換気モデルとして1階の常微分方程式を採用した場合のシミュレーションを計算した。最後に、本校の物理部がIoTセンサーとPythonを活用して課外において測定したCO₂濃度の時間変化のグラフを提供してもらい、そのデータとのフィッティングを行い、実際のデータとの一致を確認した。次ページに、ワークシートと解答例を示す。

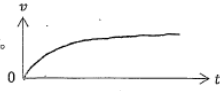
「空気抵抗を受ける物体の速度の時間変化」(参考:2008 年東大後期入試)

質量 m の物体の空気中での落下運動を考える。鉛直下向きを正とする物体の速度を v とおく。物体はその速度 v に比例した空気抵抗を受けると仮定すると、速度 v の時間変化は関係式

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv \quad \text{①}$$

で表される。ここで、 k は時間 t によらず正で一定であるとす。また、 g は重力加速度の大きさを表す。

- (1) 関係式①から予想される $v-t$ グラフの概形を示せ。



- (2) 物体を落下させた後、十分時間が経つと物体の速度は一定値 $v = \frac{mg}{k}$ に近づく。この理由を説明せよ。

$$kv = m(g - \frac{dv}{dt})$$

$$k(v - \bar{v}) = mg - m \frac{dv}{dt} \quad (mg - 0) = -m \frac{dv}{dt}$$

$$v > \bar{v} \text{ のとき, } \frac{dv}{dt} < 0 \text{ 所以 } v \text{ は減る. } v < \bar{v} \text{ のとき, } \frac{dv}{dt} > 0 \text{ 所以 } v \text{ は増える.}$$

- (3) $t=0$ における v の値を v_0 として、式①を解き、 v を t の関数で表せ。また、 $v-t$ グラフを描け。

(i) $mg - kv = 0$ のとき、①は成り立つ。

(ii) $mg - kv \neq 0$ のとき、 $\frac{dv}{dt} = \frac{mg - kv}{m}$

$$\int \frac{-k}{mg - kv} dv = -\frac{k}{m} \int dt$$

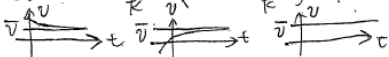
$$\log |mg - kv| = -\frac{k}{m} t + C_1 \quad (\text{C}_1 \text{ は積分定数})$$

$$|mg - kv| = e^{-\frac{k}{m} t + C_1} = C_2 e^{-\frac{k}{m} t} \quad (C_2 = e^{C_1} > 0)$$

$$kv - mg = \pm C_2 e^{-\frac{k}{m} t} = C_3 e^{-\frac{k}{m} t} \quad (C_3 = \pm C_2 \neq 0)$$

$\Rightarrow C_3 = 0$ と $C_3 \neq 0$ だが、 C を全ての定数 C とし、 $kv - mg = C e^{-\frac{k}{m} t}$
 $t=0$ のとき、 $v = v_0$ だから $C = kv_0 - mg$

$$\text{よって } v = \frac{mg}{k} + (v_0 - \frac{mg}{k}) e^{-\frac{k}{m} t} = \bar{v} + (v_0 - \bar{v}) e^{-\frac{k}{m} t}$$



「室内の空気中の CO₂ 濃度の時間変化」(参考:2008 年東大後期入試) その1

室内に CO₂ 発生源があるとき、室内の CO₂ 濃度の時間変化を考える。単位時間に室内で CO₂ が q [ppm × m³/h] 増加する。また、換気によって、単位時間に室内の空気が V [m³/h] 排出され、同量の室外の空気が室内に入ってくる。室容積は W [m³] とし、室外の CO₂ 濃度を p [ppm] とする。ここで、 q, V, W, p は正の定数とする。このとき、室内の CO₂ 濃度 x [ppm] を時間 t [h] の関数として以下のように記述しよう。

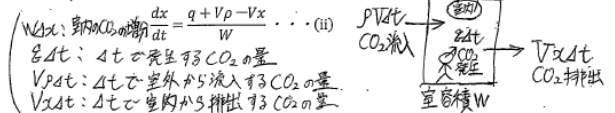
ただし、室内に流入したり室内で発生したりする CO₂ は瞬間的に拡散し、CO₂ は吸着や化学変化を起こさず、空気は温度は変化しないものとする。

微小時間 Δt における室内の CO₂ 濃度の増分を Δx とすると、室内の CO₂ の体積の増分 $W \Delta x$ は

$$W \Delta x = q \Delta t + V p \Delta t - V x \Delta t \quad \text{①}$$

で近似される。

等式 $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{q + Vp - Vx}{W}$ において、 Δt を限りなく 0 に近づけることにより、関係式 $W \frac{dx}{dt} = q + Vp - Vx$ が得られる。



- (1) 室内の CO₂ 濃度 x がある値を取ると、時間が変化してもその値が変化しなくなる。このような値 \bar{x} を求めよ。

$$V \bar{x} = (q + Vp) - W \frac{d\bar{x}}{dt}$$

$$V(\bar{x} - \bar{x}) = (q + Vp) - W \frac{d\bar{x}}{dt} - \{(q + Vp) - W \cdot 0\} = -W \frac{d\bar{x}}{dt}$$

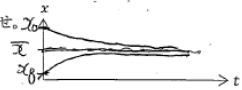
$x > \bar{x}$ のとき、 $\frac{dx}{dt} < 0$ 所以 x は減る。

$x < \bar{x}$ のとき、 $\frac{dx}{dt} > 0$ 所以 x は増える。

$x = \bar{x}$ のとき、 $\frac{dx}{dt} = 0$ 所以 x は変化しない。

よって $\frac{dx}{dt} = 0$ のとき (ii) より $\bar{x} = \frac{q}{V} + p$

- (2) 関係式 (ii) から予想される $x-t$ グラフの概形を示せ。



「室内の空気中の CO₂ 濃度の時間変化」(参考:2008 年東大後期入試) その2

- (3) $t=0$ における x の値を x_0 として、式 (ii) を解き、 x を t の関数として表せ。

$$\frac{dx}{dt} = \frac{q + Vp - Vx}{W} \quad \text{②}$$

(i) $q + Vp - Vx = 0$ のとき $x = \frac{q}{V} + p$ のとき、(ii) 式は成り立つ。

(ii) $q + Vp - Vx \neq 0$ のとき、

$$\frac{dx}{q + Vp - Vx} = \frac{dt}{W}$$

$$\int \frac{-V}{q + Vp - Vx} dx = -\frac{V}{W} \int dt$$

$$\log |q + Vp - Vx| = -\frac{V}{W} t + C_1 \quad (\text{C}_1 \text{ は積分定数})$$

$$|Vx - q - Vp| = e^{-\frac{V}{W} t + C_1} = C_2 e^{-\frac{V}{W} t} \quad (C_2 > 0)$$

$$Vx - q - Vp = \pm C_2 e^{-\frac{V}{W} t} = C_3 e^{-\frac{V}{W} t} \quad (C_3 \neq 0)$$

$C_3 = 0$ のとき (i) だから C を全ての定数 C とし、

$$Vx = q + Vp + C e^{-\frac{V}{W} t}$$

$t=0$ のとき、 $x = x_0$ だから

$$Vx_0 = q + Vp + C \quad \therefore C = Vx_0 - (q + Vp)$$

よって、 $Vx = q + Vp + \{Vx_0 - (q + Vp)\} e^{-\frac{V}{W} t}$

$$\therefore x = \left(\frac{q}{V} + p\right) + \left\{x_0 - \left(\frac{q}{V} + p\right)\right\} e^{-\frac{V}{W} t}$$

$$= \bar{x} + (x_0 - \bar{x}) e^{-\frac{V}{W} t}$$

3年 組 番 氏名 解答例

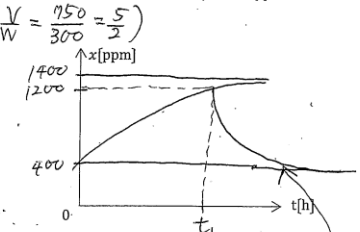
- (4) $t=0$ において $x_0 = 400$ ppm のとき、室内の CO₂ 濃度の時間変化を示すグラフの概形を描け。ただし、 $q = 7.5 \times 10^5$ ppm × m³/h、 $V = 750$ m³/h、 $W = 300$ m³、 $p = 400$ ppm とする。

$$\left(\bar{x} = \frac{7.5 \times 10^5}{750} + 400\right) \quad \left(\frac{V}{W} = \frac{750}{300} = \frac{5}{2}\right)$$

$$= 1400 \text{ ppm}$$

$$(x_0 - \bar{x} = 400 - 1400) = -1000 \text{ ppm}$$

$$\therefore x = 1400 - 1000 e^{-\frac{5}{2} t}$$



- (5) $t = t_1$ [h] において $x = 1200$ ppm のとき、室内に CO₂ 発生源がなくなった ($q = 0$) とする。

- (4) の $x-t$ グラフに、 $t \geq t_1$ における室内の CO₂ 濃度の時間変化を示すグラフの概形を描け。ただし、 $W = 300$ m³、 $p = 400$ ppm とする。

$$Vx = q + Vp + C e^{-\frac{V}{W} t}$$

$t = t_1$ のとき、 $x = 1200$ ppm だから

$$750 \times 1200 = 750 \cdot 400 + C e^{-\frac{V}{W} t_1}$$

$$\Leftrightarrow C e^{-\frac{V}{W} t_1} = 750(1200 - 400) = 750 \times 800 = 6 \times 10^5$$

$$\therefore C = 6 \times 10^5 e^{\frac{V}{W} t_1}$$

よって、 $Vx = Vp + C e^{-\frac{V}{W} t}$

$$\therefore x = p + \frac{C}{V} \cdot e^{-\frac{V}{W} t} = 400 + 800 e^{-\frac{V}{W}(t-t_1)}$$

よって $\lim_{t \rightarrow \infty} x = 400$ ppm.

(5) CO₂ センサに示す測定結果 t によるグラフの概形は、

$$\frac{C}{V} = \frac{750 \times 800}{750} e^{\frac{5}{2} t_1}$$

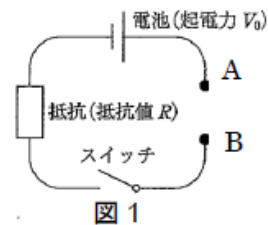
<第2回>RC 直列回路の過渡現象・線形モーターの過渡現象

電磁気学において直列 RC 回路における回路方程式を記述し、1 階の常微分方程式であることに気づかせる。1 階の常微分方程式の解により得られる結果を今回の条件と適応させ、時間の関数 Q , I の時間変化のグラフを示す

すみません。長くなったので、この辺で。あとは 18 日に情報交換できると良いなと思っています。

活動を行う。その後、電流と電圧の時間変化を直接測定し、その結果が 1 階の常微分方程式を解いた結果と一致することを確認した。最後に、未知の回路として線型モータを直流電源につないだ場合の思考実験（参考資料：2020年東京大学前期入試問題）を用いて、生徒が 1 階の常微分方程式としての時間追跡が可能となるかを調べた。以下に、授業で用いた問題を示す。

図 1 のように抵抗値 R の抵抗と、起電力 V_0 の電池、スイッチ、端子 A, B を配置した。以下の I 及び II の問いに答えよ。



I 電荷がたまっていない電気容量 C のコンデンサーと、端子 A, B につないだ。この状態で、スイッチを閉じて時間 t とコンデンサーにたまった電気量 Q の関係を調べた。スイッチを閉じた瞬間を $t=0$ とし、 $t=0$ で $Q=0$ とする。

- (1) $t=0$ において、回路を流れる電流はいくらか。
- (2) 時刻 t における回路を流れる電流を I , コンデンサーの電気量を Q とするとき、キルヒホッフ第 2 法則を示せ。
- (3) 十分短い時間変化を Δt , 電気量の変化を ΔQ とするとき、電流の定義式を示せ。
- (4) 十分時間が経過したとき、電気量が一定になる。このとき、回路を流れる電流とコンデンサーの電気量はいくらか。
- (5) $t=0$ から十分時間が経過するまでの電気量の時間変化のグラフと、電流の時間変化のグラフをそれぞれ示せ。また、どちらのグラフにもコンデンサーにたまった電気量を図示せよ。
- (6) $t=0$ から十分時間が経過するまでに、抵抗で発生したジュール熱はいくらか。
- (7) 電荷がたまっていない電気容量 $2C$ のコンデンサーをつないだ場合では、電気量の時間の変化のグラフと、電流の時間変化のグラフはそれぞれどうなるか。(5)のグラフに書き加えよ。

RC 回路

II 水平面上に距離 d の間隔で置かれた 2 本の長い導体のレールと質量 m の導体棒を、図 2 のようにレールに対して垂直に渡した状態にして、レールと端子 A, B をつないだ。このとき、レールには磁束密度の大きさ B の一様な磁場が鉛直下向き（紙面に垂直で表から裏へ向かう方向）にかけられている。導体棒とレールの接点を X, Y と呼ぶ。また、導体棒は

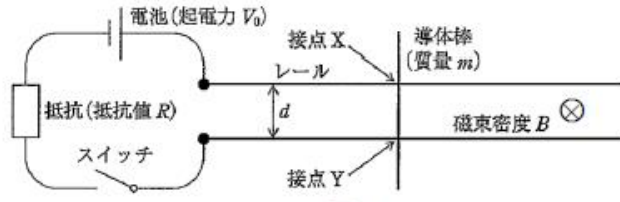


図 2

レール方向にのみ動けるものとし、摩擦や空気抵抗、導体棒の両端に発生する誘導電荷、および回路を流れる電流がつくる磁場の影響は無視できるとする。導体棒を静止した状態で、スイッチを閉じた。このときから、導体棒には電気量 Q が流れ始める。スイッチを閉じた瞬間を $t=0$ とし、 $t=0$ で $v=0$, $Q=0$ とする。

- (1) $t=0$ において、回路には電流が流れ、導体棒は右向きに動き始めた。このときの導体棒の加速度の大きさはいくらか。
- (2) 時刻 t における回路を流れる電流を I , 導体棒の加速度の大きさを a , 導体棒の速さを v とする。時刻 t におけるキルヒホッフ第 2 法則及び導体棒の運動方程式を示せ。
- (3) (2) で、導体棒を流れる電気量を Q とするとき、加速度の定義式及び電流の定義式、導体棒の運動方程式を用いて、 $v = \text{ア} Q$ と表せる。 ア に当てはまる式を示せ。
- (4) (3) の結果を、(2) のキルヒホッフ第 2 法則に代入することで、 $V_0 = RI + \frac{Q}{\text{イ}}$ と表せる。 イ に当てはまる式を示せ。
- (5) 十分時間が経過したとき、導体棒は一定の速さ（到達速さ）で運動した。 $t=0$ から十分時間が経過するまでに導体棒に流れた電気量 Q_f 及び到達速さ v_f はいくらか。
- (6) $t=0$ から十分時間が経過するまでの、導体棒を流れた電気量の時間変化のグラフと、電流の時間変化のグラフをそれぞれ示せ。
- (7) $t=0$ から十分時間が経過するまでに、電池のする仕事は $Q_f V_0$ である。到達速さに達しているときの導体棒の運動エネルギーを、 Q_f , V_0 で表せ。
- (8) $t=0$ から十分時間が経過するまでに、抵抗で発生したジュール熱を、 m , V_0 , B , d で表せ。

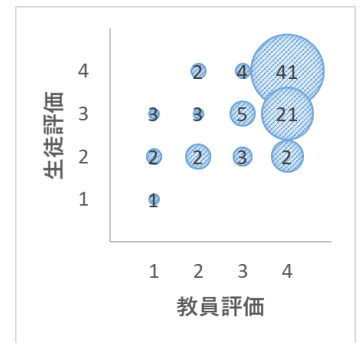
線形モータ

結果・考察

「RC 直列回路の過渡現象・線形モーターの過渡現象」について、平成 29 年度から令和 2 年度に SSH クラスの生徒が実践した授業をベースに、SSH コース・普通理型コースで共通に実践できるように教材を一から見直した。以下に RC 直列回路の過渡現象に関するルーブリックの評価規準と分析結果及び考察を示す。

(項目 1) RC 直列回路の過渡現象における電流の時間変化の把握

普通理型コースの生徒も含めて全体の 49% の生徒は、RC 回路の過渡現象の電気量の時間変化をコンデンサーの電気容量毎に追うことができ、全体で 79% の生徒は過渡現象の電気量の時間変化のグラフを適切に表現できる。

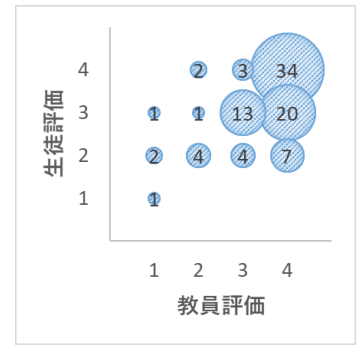


評価			
4	3	2	1
<input type="checkbox"/> 電池, 抵抗, コンデンサーからなる直列回路(RC回路)について, 以下の項目を全て表現することができる。 ・回路を流れる電流の時間変化のグラフ ・電気容量の異なる2つのコンデンサー毎の, 回路を流れる電流の時間変化のグラフ	<input type="checkbox"/> 電池, 抵抗, コンデンサーからなる直列回路(RC回路)について, 回路を流れる電流の時間変化のグラフを表現できる。	<input type="checkbox"/> 電池, 抵抗, コンデンサーからなる直列回路(RC回路)について, 以下の項目を全て表現することができる。 ・ $t=0$ での電流 ・十分時間が経過した後の電流	<input type="checkbox"/> 電池, 抵抗, コンデンサーからなる直列回路(RC回路)について, 以下の項目の一方または両方とも表現することができない。 ・ $t=0$ での電流 ・十分時間が経過した後の電流

(項目 2) RC 直列回路の過渡現象における電気量の時間変化の把握

全体の 42%の生徒は、RC 回路の過渡現象の電気量の時間変化をコンデンサーの電気容量毎に追うことができ、全体で 80%の生徒は過渡現象の電気量の時間変化のグラフを適切に表現できる。

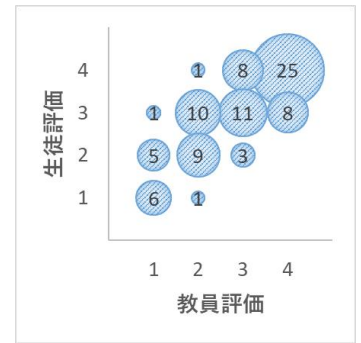
評価			
4	3	2	1
<input type="checkbox"/> RC回路について、以下の項目を全て表現することができる。 ・コンデンサーの電気量の時間変化のグラフ ・電気容量の異なる2つのコンデンサー毎のコンデンサーにたまる電気量の時間変化のグラフ	<input type="checkbox"/> RC回路について、コンデンサーの電気量の時間変化のグラフを表現できる。	<input type="checkbox"/> RC回路について、以下の項目を全て表現することができる。 ・ $t=0$ でのコンデンサーの電気量 ・十分時間が経過した後のコンデンサーの電気量	<input type="checkbox"/> RC回路について、以下の項目の一方または両方とも表現することができない。 ・ $t=0$ でのコンデンサーの電気量 ・十分時間が経過した後のコンデンサーの電気量



(項目 3) 線型モータの過渡現象における運動方程式・回路方程式の把握

全体の 38%の生徒は、任意の時間での線型モーターにかかる関係式を立式することができ、全体で 73%の生徒はモーターの始動からある時刻までの関係式を適切に表現できる。

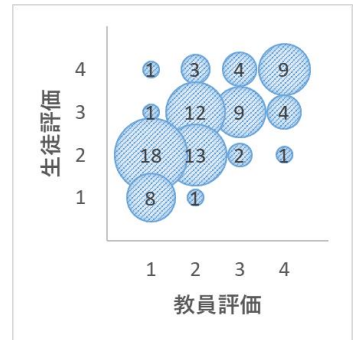
評価			
4	3	2	1
<input type="checkbox"/> 導体棒の運動状態を把握し、キルヒホッフ第2法則及び導体棒の運動方程式を、以下の条件の下で立式できる。 ・ $t=0$ の直後 ・到達速さに達する前のある時間 ・十分時間が経過し、到達速さに達した時間	<input type="checkbox"/> 導体棒の運動状態を把握し、キルヒホッフ第2法則及び導体棒の運動方程式を、以下の条件の下で立式できる。 ・ $t=0$ の直後 ・到達速さに達する前のある時間	<input type="checkbox"/> 導体棒の運動状態を把握し、キルヒホッフ第2法則及び導体棒の運動方程式を、以下の条件の下で立式できる。 ・ $t=0$ の直後	<input type="checkbox"/> 導体棒の運動状態を把握できない。または、キルヒホッフ第2法則及び導体棒の運動方程式を正しく立式できない。



(項目 4) RC 回路と線型モータの過渡現象の比較と微分方程式の解の活用

全体の 20%の生徒は、数学的に同型の方程式からは同じ結論を導けることを理解し、物理的な現象を結びつけることができる。全体で 50%の生徒が 1 階の微分方程式と同型ならば同じ物理量は同じ時間変化をすることが理解できた。

評価			
4	3	2	1
<input type="checkbox"/> 導体棒の運動方程式と、キルヒホッフ第2法則を連立することで、RC回路と同型の方程式を導くことができる。 <input type="checkbox"/> 導いた方程式がRC回路と同型の方程式であることを踏まえ、以下の項目を表現できる。 ・導体棒に流れる電流や電気量の時間変化のグラフ ・エネルギー収支を捉えることができ、抵抗で発生したジュール熱を表現できる。	<input type="checkbox"/> 導体棒の運動方程式と、キルヒホッフ第2法則を連立することで、RC回路と同型の方程式を導くことができる。 <input type="checkbox"/> 導いた方程式がRC回路と同型の方程式であることを踏まえ、導体棒に流れる電流や電気量の時間変化のグラフを表現できる。	<input type="checkbox"/> 導体棒の運動方程式と、キルヒホッフ第2法則を連立することで、RC回路と同型の方程式を導くことができる。	<input type="checkbox"/> 導体棒の運動方程式と、キルヒホッフ第2法則を連立することで、RC回路と同型の方程式を導くことができない。



成果・課題・改善点

【成果】

- ・「空気抵抗を受ける物体」「部屋の換気モデル」「RC回路」「線型モータ」の4つのパターンで1階の微分方程式の時間追跡を経験させる中で、80%の生徒はRC回路に対して変数毎の時間変化をグラフで見出すことができるようになり、上位50%の生徒は未知の現象に対しても、1階の微分方程式であればその現象にかかる物理量の時間変化を追うことができるようになることが示された。
- ・SSHコースの生徒及び普通理型コースの生徒が共通で取り組むことができるモデル授業ができあがった。

【課題】

- ・未知の現象に対して、物理と数学のそれぞれの見方や考え方を活用して、現象を追うことができるようになるには半数の生徒が至っていない。

【改善点】

- ・クロスカリキュラムに限らず、物理の教科の単元の中にもまだ1階の微分方程式にかかる現象があるので、随時、その背景にある数学に触れながら指導を行い、数学を意識した物理の授業を展開するように努める。

参考文献：2020年度東京大学前期入学試験問題 物理 第2問

2008年度東京大学後期入学試験問題 総合科目Ⅱ 第2問