

コマの「ブレード」と衝突時の運動量の変化にはどのような関係があるのか

0304 群馬県立高崎高等学校 3年 坂本聖



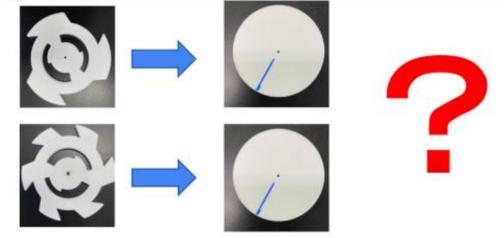
1 研究の概要

パーツを組み替えて改造できるベーゴマを元にした玩具が人気を博している¹⁾。このコマは外側にブレードを持っていることが大きな特徴の一つである。様々な形状・枚数のブレードが市販されているが、衝突時の効果は定かではなく、先行研究も見当たらない。

そこで、これらのブレードがコマどうしの衝突において運動量変化にどのような影響を与えるかについて研究を行った。**実験**および**モデル計算**を行ったところ、

ブレードの枚数が少なくなるほど、コマを弾きやすくなる（衝突時の運動量変化が大きくなる）という結論を得た。

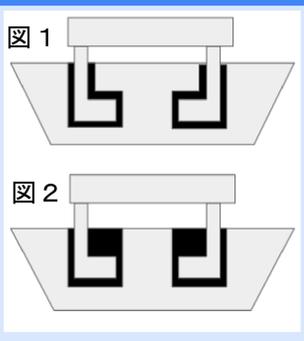
リサーチクエスト
コマの「ブレード」の枚数と衝突時の運動量変化にはどのような関係があるのか



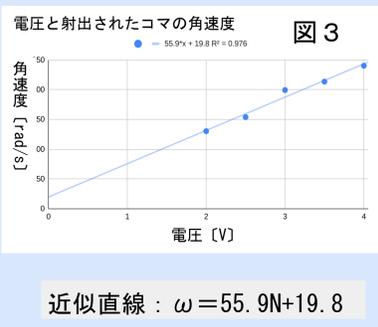
2 装置の開発

回転制御装置の開発

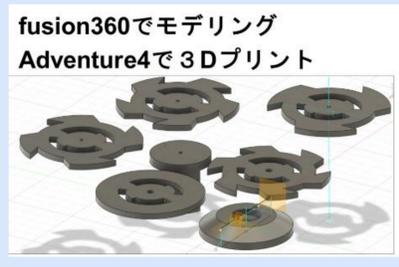
- ・ベーゴマ玩具のコマ射出機構を参考にし、「Fusion360」でモデリングを行い、「Adventure4」で3Dプリントを行った。
- ・コマは「精密ゴマNEXT-STARLIGHT」を使用し、モーターはメーカー「CHANGES」のものを用いた。
- ・電源装置につなぎ回転させるとコマと射出装置は図1の位置関係で固定される。
- ・回転を外部からの力で瞬時に停止させると位置関係は図2のようになり、固定が外れ射出される。



つまみの目盛り	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
平均角速度	130.376	153.938	199.491	213.628	240.33
標準偏差	4.089	5.639	7.423	4.798	7.044



ブレードつき円盤の開発

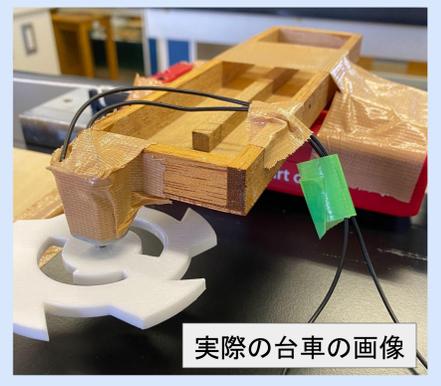


質量: 20g
 外径: 0.042m
 内径: 0.030m

質量、慣性モーメントの条件を揃えるため、内径と外径を揃え、どれもブレードが周の1/2を占めるように設計した

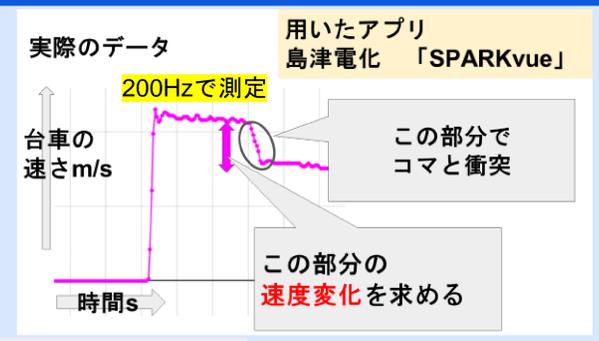
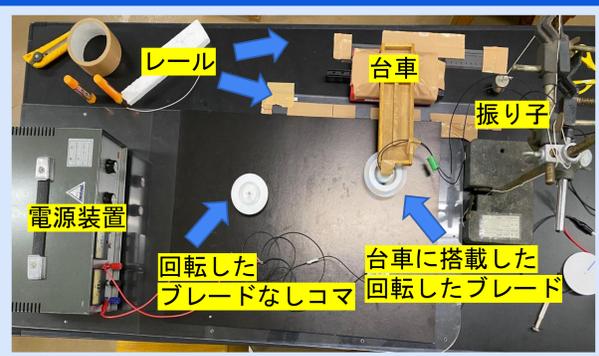
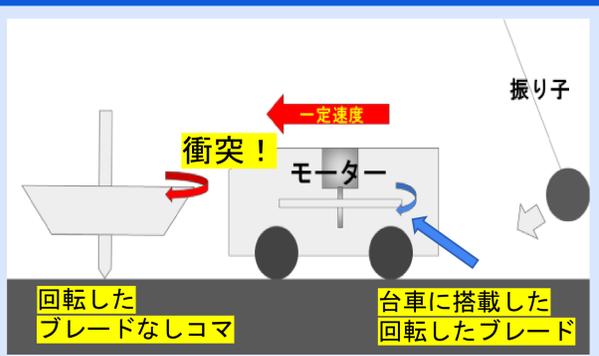
衝突装置の開発

- ・コマどうしの衝突では条件を揃えるのが困難なため片方は台車にくくりつけたブレード付き円板で代用する。
- ・モーターは電源装置につなぎ一定の電圧を加えることで600rpmで回転させた。
- ・定規で台車の車輪に添わせてレールを作り横方向に移動しないようにする。
- ・初速はおもりをくくりつけた振り子を衝突させることで与え、0.40m/sで進むようにした。



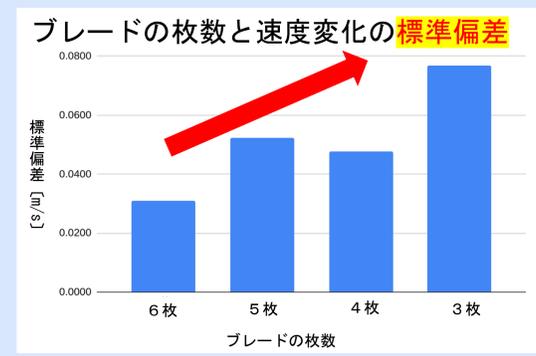
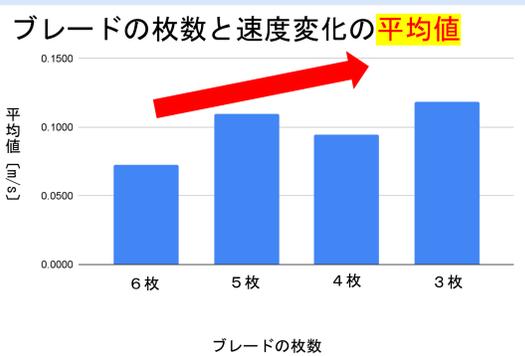
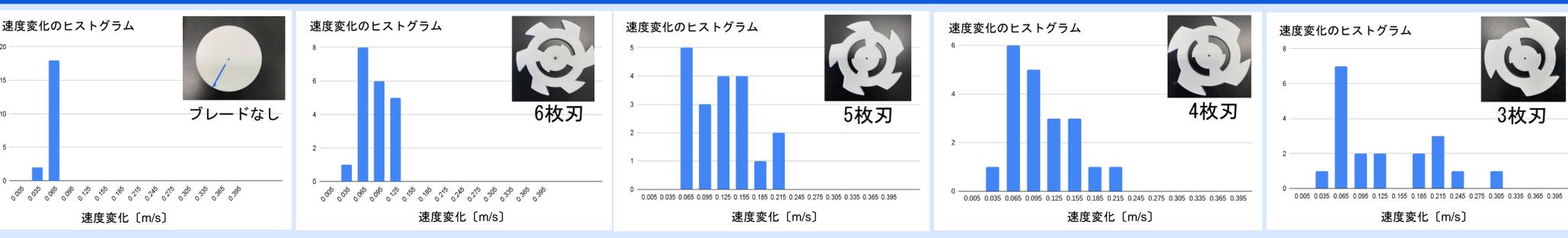
角速度を制御してコマを射出することに成功

3 実験方法



- 【質量】
- ・コマ: 53.0 ± 0.1 g
 - ・台車: 313.2 ± 0.1 g
 - ・おもり: 50.0 ± 0.1 g
- 【速度】
- ・コマ: $(6.05 \pm 0.05) \times 10^2$ rpm
 - ・モーター: $(6.05 \pm 0.05) \times 10^2$ rpm
 - ・台車の初速度: 0.40 ± 0.05 m/s

4 実験結果

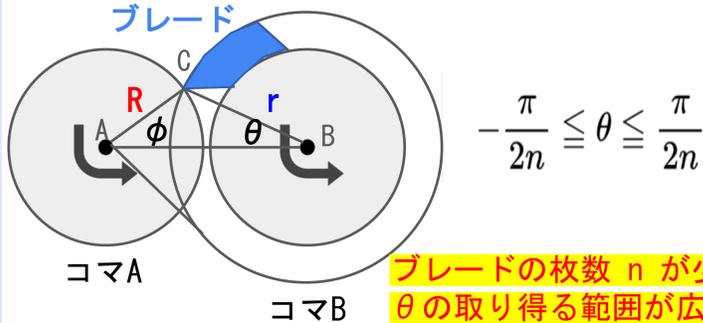


ブレード枚数が少なくなると速度変化の平均値と標準偏差は大きくなる傾向がある！

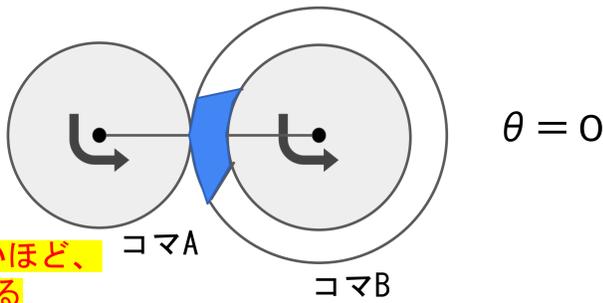
5 モデル計算

変数の設定

パターン1：ブレードの間に衝突するとき
・下図で定義した θ が、下の範囲で一様な確率分布をとる。



パターン2：ブレードの円弧に衝突するとき
・左図で定義した θ は、 $\theta = 0$ と考えられる。



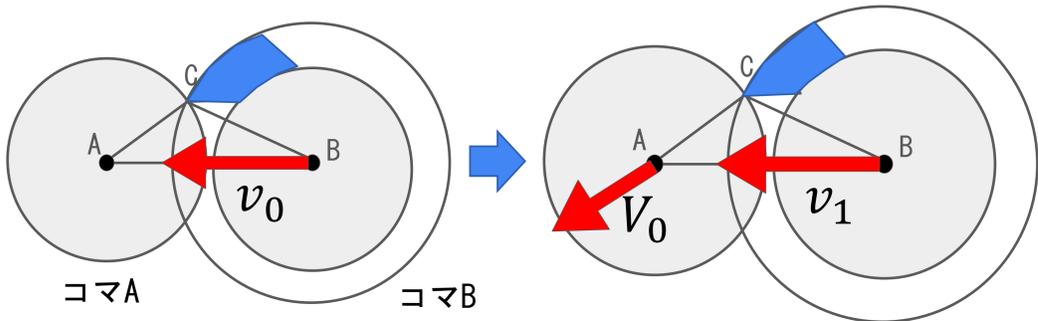
【初期速度】
コマBの並進速度： v_0
コマBの初期角速度： ω_0

【二つの半径】
コマA： R
コマB： r
【質量】
コマA： m
コマB： M
【角度】
角CAB= ϕ
角CBA= θ

【衝突後】
コマBの並進速度： v_1
コマBの初期角速度： ω_1
コマAの並進速度： V_1

これらが未知数

立式①：運動量保存則

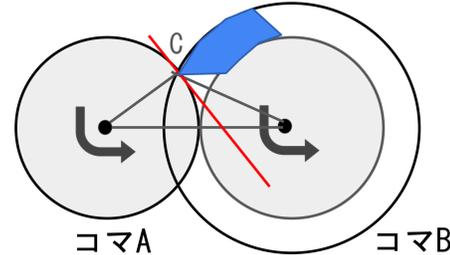


衝突時に進行方向に外力は加わらないので、衝突前後で進行方向の運動量が保存する

$$Mv_0 = Mv_1 + mV_0 \cos\phi$$

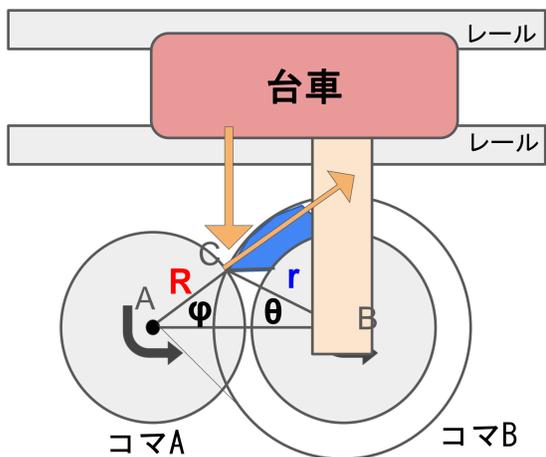
立式②：反発係数

コマに対する接線に垂直な成分について、反発係数を e とすれば



$$\frac{V_0 \cos\phi - r\omega_1 \sin(\theta + \phi) - v_1 \cos\phi}{v_0 \cos\phi + r\omega_0 \sin(\theta + \phi)} = e$$

立式③：角運動量保存則



レールから受ける垂直抗力の作用線は、台車にかかるトルクを0にするためCを通る直線上にある。したがって、C周りの角運動量²⁾が保存するので、

コマBの回転による角運動量

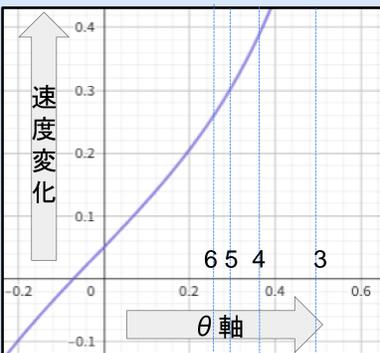
コマAとコマBの並進速度による軌道角運動量

$$I_0 \omega_0 + mrv_0 \sin\theta = I_0 \omega_1 + mr(v_1 - V_0 \cos\phi) \sin\theta + mRV_0 \cos\phi \sin\phi$$

6 考察

立式①～③を連立して解くと速度変化 Δv を θ の関数として以下の式を得る

$$\Delta v(\theta) = \frac{(1+e)\{v_0 + r\omega_0(1 + \frac{r}{R})\theta\}}{1 + \frac{M}{m} - \frac{mr^2}{I_0}(1 + \frac{r}{R})\theta^2}$$



左のグラフが示すように、 θ が大きくなると速度変化も大きくなる。

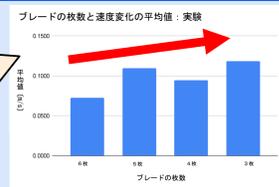
ブレードの枚数が少ないほど、 θ は大きい値を取り得るようになり、平均値も増加するので、実験結果と一致している！

θ を確率変数として、ブレードの枚数ごとに期待値（平均値）を計算する

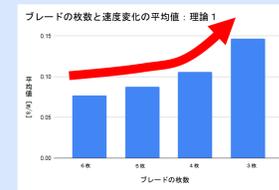
理論1

$$\frac{n}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}} |\Delta v(\theta)| d\theta + \frac{1}{2} \Delta v(0)$$

実験で得られたデータ



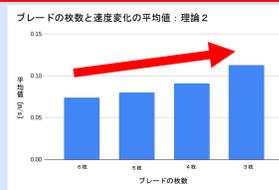
・ $\theta < 0$ の部分がすべて $|\Delta v|$ に変換されるとして計算する



理論2

$$\frac{3}{4} \Delta v(0) + \frac{n}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \Delta v(\theta) d\theta$$

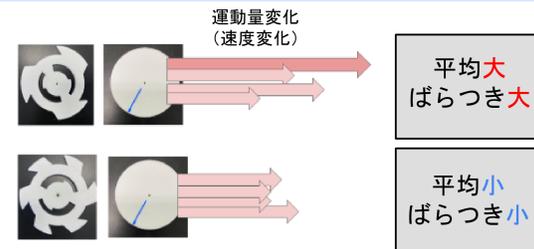
・ $\theta < 0$ の部分がすべて $\theta = 0$ に変換されるとして計算する



理論2の方が、実験で得られたデータに近い傾向が得られた。また、定量的にも実験データと一致している！

実験およびモデル計算の両方からブレード枚数が少ないほど、衝突時の運動量変化（速度変化）の平均とばらつきが大きくなると考えられる。

モデル計算からブレードの枚数が少ないほど、衝突の際により内側（ θ が大きい値をとれる）に入ることができ、より多くの回転エネルギーを並進運動エネルギーに変えることができると考えられる。



7 今後の展望

- ・ 実験データをより多く収集、理論モデルの更なる検証を行い、必要に応じて改良する。
- ・ 角運動量に関するデータも収集し、モデル計算を行う。

参考文献

- 1) <https://hobby.watch.impress.co.jp/docs/special/1501269.html> 「大人と子供が競い合えるスポーツに！ (HOBBY Watch)」2024年4月閲覧
- 2) 山崎 勝義「歳差運動の物理学 (第18版)」漁火書店 (2024)